环形加速器中的粒子动力学

朱雄伟
中国科学院高能物理研究所

Abstract

本文介绍了环形加速器中的粒子动力学，环形加速器中带电粒子的运动分为横向运动与纵向运动。本文的题材来自于加速器的理论与设计，我们试图将物理问题与数学方法有机地结合起来讨论环形加速器中的粒子动力学。一方面，物理问题的提出推动了数学的发展，另一方面，数学的发展使得物理问题可采用更加高级的数学工具来简化物理问题的解决，从而解决物理问题更加容易。本文的特色是运用哈密顿力学处理环形加速器中的粒子的横向运动和纵向运动。

Keywords:环形加速器，横向运动，纵向运动，哈密顿力学

1 引言

环形加速器的概念是上个世纪五十年代提出的，1952年E.Courant,H.Synder,and S.Livingston提出了交变梯度聚焦的概念，交变梯度聚焦也就是强聚焦原理。强聚焦原理解决了回旋加速器需要大型磁铁的困难,回旋加速器向更高能量发展需要的磁铁越来越大，它是弱聚焦加速器。加速器中束流靠四极磁铁完成，单块的四极铁在一个横向方向聚焦，在另一个横向方向散焦，单块的四极铁无法同时在两个横向方向聚焦，但是四极磁铁的组合在整体上可以完成两个横向方向的聚焦。假定两块符号相反的四极磁铁的等效焦距为f_1, f_2,这两块四极磁铁间隔距离d放置，那么其等价的四极磁铁的焦距F为

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}, \tag{1}$$

f_1, f_2反号，选择d，总可以使$F > 0$。那么这两块间隔放置四极磁铁整体上在两个横向方向都是聚焦，这就是强聚焦原理，亦即交变梯度聚焦原理。环形加速器在五十年代、六十年代获得了发展，它是加速器发展史上的一个飞跃。在直线加速器中，带电粒子的纵向运动稳定性与横向运动稳定性不兼容，纵向聚束和横向聚焦无法同时完成，所以也一样采取强聚焦原理对带电粒子束进行聚焦，也就是用四极铁的组合进行横向聚焦。如果没有强聚焦原理，直线加速器不可能把带电粒子束加速到高能量。而在环形加速器中，带电粒子的加速是在高频腔中补充或加速能量，带电粒子束在环形周期磁聚焦结构中依靠强聚焦原理得到了很好的横向聚焦，带电粒子束才能反复的通过高频腔得到补充或加速能量。

环形加速器主要由二极铁、四极铁、六极铁、高频腔所组成，带电粒子在二极铁中偏转，在四极铁、六极铁中聚焦，在高频腔中加速，带电粒子在环中运动、储存。环形加速器主要有储存环(storage ring)、增强器(booster)、阻尼环(damping ring)、RLA(Recirculating linear acelerator)环/ERL(Energy recovery linacs)环-返回型直线加速器返回环。在储存环中带电粒子作环形运动，储存在环中，同时在高频腔中得到加速补充由于辐射而损失的能量。增强器在储存带电粒子的同时在高频腔中反复加速带电粒子，使带电粒子从低能加速到高能。阻尼环在储存带电粒子的同时通过扭摆磁铁阻尼带电粒子束的发射度。RLA环/ERL环在储存带电粒子返回的同时通过波荡器兼作光源。

储存环是最主要的环形加速器，主要应用于高能对撞机与同步辐射光源。用正负电子作对撞实验研究粒子物理是20世纪50年代提出的，20世纪60年代建成了最初的几台正负电子对撞机，成功进行了正负电子对撞。它们有Frascati的250MeV储存环AdA(1962年),斯坦福的500MeV储存环CBX (1963年)前苏联新西伯利亚的140MeV储存环VEP-1(1963年)。同步辐射光源是在正负电子对撞机的基础上发展起来的，大多数对撞机兼作同步辐射，20世纪70年代以后开始建造专门的同步辐射光源。同步辐射装置经历了一代、二代、三代、四代, 是非相干辐射光源. 一代同步辐射装置是寄生在高能物理装置上兼用的同步辐射装置(20 世纪70 年代以来). 二代同步辐射装置是大量放入插入件的专用光源(20 世纪80 年代以来). 而三代同步辐射装置是优化的, 低发射度的专用的同步辐射光源(20 世纪90 年代以来). 而目前世界上普遍研究、设计、建造、运维的是第四代同步辐射光源-衍射极限环，它的发射度、亮度都达到了极限。

2 哈密顿力学

1788年拉格朗日写了著作《分析力学》，完全用数学分析的方法来解决力学问题，无须借助以往常用的几何方法，并逐步发展成为一系列处理力学问题的新方法，即所谓的分析力学。拉格朗日是用n个独立变量来描写力学体系的运动，所以和牛顿运动方程一样，是二阶常微分方程，我们把这组方程称之为拉格朗日方程。1834年哈密顿提出，如果用坐标和动量为独立变量，那么运动方程（微分方程组）有二阶降为一阶，但方程式的数目翻了一倍，变为$2n$个方程式，这组方程我们称之为哈密顿正则方程。哈密顿正则方程在理论上有重要意义，它是从经典力学走向量子力学的桥梁，在理论物理的各分支中有广泛的应用。哈密顿在1843年又提出运用变分法的哈密顿原理来描写力学体系的运动，它和牛顿方程、拉格朗日方程、哈密顿正则方程等价。

2.1 拉格朗日力学与哈密顿力学

假定具有n个自由度的力学体系的坐标变量$q_i, i=1,\cdots,n$,广义速度变量$\dot{q}_i=\frac{dq_i}{dt}, i=1,\cdots,n$, t为时间变量，那么拉格朗日函数$L(q_i,\dot{q}_i,t)$是$2n$个动力学变量的函数。运用力学的变分原理(哈密顿原理),则有变分方程

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L(q_i,\dot{q}_i,t)=0, \tag{2}$$

由以上变分方程可得拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \tag{3}$$

引入广义动量变量$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, 通过勒让德变换将坐标$(q_i, \dot{q}_i, t)$变换到坐标$(q_i, p_i, t)$, 定义哈密顿函数为

$$H(q,p,t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q,p,t), \tag{4}$$

哈密顿函数的微分为

$$dH = \frac{\partial H}{\partial t}dt + \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i, \tag{5}$$

同时由哈密顿函数的定义，其变分展开为

$$dH = \sum_i p_i d\dot{q}_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t}dt, \tag{6}$$

由以上微分形式可得以下方程组

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \tag{7}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{8}$$

以上方程组即为哈密顿正则方程组，它是$2n$个一阶微分方程组，同时有$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$。

带电粒子在电磁场中运动时，其拉格朗日函数为

$$L = -m_0 c^2 (1 - \frac{v^2}{c^2})^{\frac{1}{2}} - e\phi + eA \cdot v, \tag{9}$$

式中m_0, e为带电粒子的质量与电荷，ϕ, A为电磁场的电位势和磁矢势。而哈密顿函数为

$$H = e\phi + c[(p - eA)^2 + m_0^2 c^2]^{\frac{1}{2}}. \tag{10}$$

我们在求解哈密顿方程时，经常通过一些正则变换，寻找运动不变量，进而简化哈密顿方程。正则变换是通过系统坐标变换来进行的，对于坐标变换$(q_i, p_i) \to (Q_i, P_i)$, 其构成正则变换的充分必要条件是

$$[\sum_i P_i dQ_i - H_1(Q_i, P_i, t)] - [\sum_i p_i dq_i - H(q_i, p_i, t)] = dG, \tag{11}$$

dG是一个完整的微分。对于正则变换，新旧坐标之间的关系为

$$Q_i = Q_i(q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n, t), \tag{12}$$

$$P_i = P_i(q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n, t). \tag{13}$$

变换关系由生成函数G求得，有四种正则变换：

- $G_1(q,Q,t): p_i = \frac{\partial G}{\partial q_i}, P_i = -\frac{\partial G}{\partial Q_i},$
- $G_2(q,P,t): p_i = \frac{\partial G}{\partial q_i}, Q_i = \frac{\partial G}{\partial P_i},$
- $G_3(Q,p,t): P_i = -\frac{\partial G}{\partial Q_i}, q_i = -\frac{\partial G}{\partial p_i},$
- $G_4(p,P,t): q_i = -\frac{\partial G}{\partial p_i}, Q_i = \frac{\partial G}{\partial P_i},$

而变换后的哈密顿函数H_1为

$$H_1(Q,P,t) = H(q,p,t) + \frac{\partial G}{\partial t}. \tag{14}$$

2.2 哈密顿力学在加速器中的应用

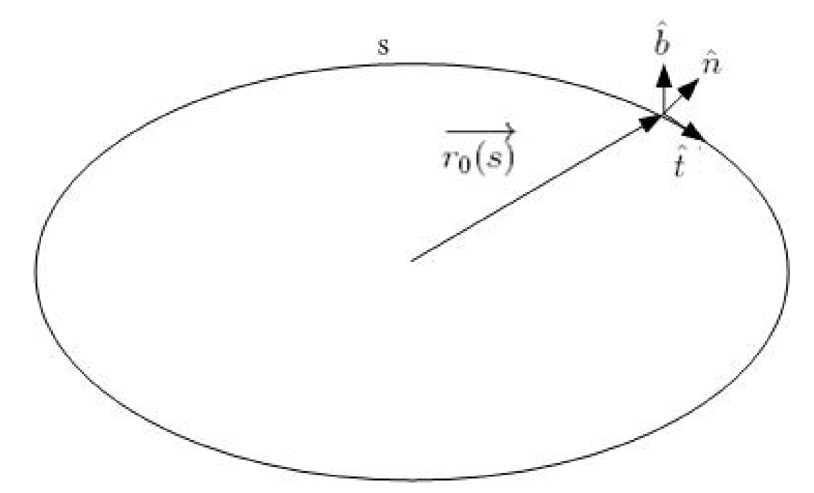


Figure 1. 环形加速器的参考坐标系

在环形加速器中，假定带电粒子的参考闭合轨道在一个平面上，或者说在水平面，如上图。引入Frenet-Serret坐标系，参考轨道向量为$\overrightarrow{r_0(s)}$, s为参考轨道上参考点到起始点之间的轨道长度，$\hat{t}$为轨道切向单位向量，$\hat{n}$为轨道法向单位向量，$\hat{b}$为轨道平面法向单位向量，$\hat{n}, \hat{b}, \hat{t}$构成一个右手正交坐标系。那么围绕参考轨道的粒子向量可表达为

$$\overrightarrow{r(s)} = \overrightarrow{r_0(s)} + x\hat{n} + y\hat{b} \tag{15}$$

有如下特性

$$\hat{t} = \frac{d\overrightarrow{r_0(s)}}{ds}, \tag{16}$$

$$\frac{d\hat{n}}{ds} = -\frac{1}{\rho}\hat{t}, \tag{17}$$

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \frac{1}{\rho}\hat{n}, \tag{18}$$

$$\frac{d\hat{b}}{ds} = 0. \tag{19}$$

上式中，ρ为参考轨道曲率半径。

在坐标系(x,y,s)中, 假定带电粒子的正则动量为$\overrightarrow{P}$, 作正则变换，定义正则变换生成函数为

$$G(\overrightarrow{P},x,y,s)=-\overrightarrow{P}\cdot(\overrightarrow{r_0(s)}+x\hat{n}+y\hat{b}), \tag{20}$$

对于坐标系(x,y,s)的正则动量为

$$p_s=-\frac{\partial G}{\partial s}=(1-\frac{x}{\rho})\overrightarrow{P}\cdot\hat{t}, \tag{21}$$

$$p_x=-\frac{\partial G}{\partial x}=\overrightarrow{P}\cdot\hat{n}, \tag{22}$$

$$p_y=-\frac{\partial G}{\partial y}=\overrightarrow{P}\cdot\hat{b}. \tag{23}$$

因为$\frac{\partial G}{\partial t}=0$, 也就是$G$不含时间变量，在环形加速器中，横向运动只考虑在磁场中的运动，假定磁矢势为A, 在坐标系(x,y,s)中类似有

$$A_s=(1-\frac{x}{\rho})A\cdot\hat{t}, \tag{24}$$

$$A_x=A\cdot\hat{n}, \tag{25}$$

$$A_y=A\cdot\hat{b}. \tag{26}$$

从而，带电粒子在磁场中的哈密顿函数为

$$H(q,p,t)=c[(p_x-eA_x)^2+(p_y-eA_y)^2+(\frac{p_s-eA_s}{1-\frac{x}{\rho}})^2+m_0^2c^2]^{\frac{1}{2}}. \tag{27}$$

在环形加速器粒子动力学中，我们往往以s为时间变量代替时间变量t，由哈密顿变分原理有以下变分方程

$$\delta\int Ldt=\delta\int(p_x\frac{dx}{dt}+p_y\frac{dy}{dt}+p_s\frac{ds}{dt}-H)dt=0, \tag{28}$$

上式可变换为

$$\delta\int(p_x\frac{dx}{ds}+p_y\frac{dy}{ds}-H\frac{dt}{ds}+p_s)ds=0. \tag{29}$$

由上式可知，新的正则变量对为$(x,p_x),(y,p_y),(t,-H)$, 而哈密顿函数为$F=-p_s$, 时间变量为s. 哈密顿函数$F=-p_s$为

$$F(x,y,t,p_x,p_y,-H,s)=-p_s=-eA_s-(1-\frac{x}{\rho})[\frac{1}{c^2}(H^2-m_0^2c^4)-(p_x-eA_x)^2-(p_y-eA_y)^2]^{\frac{1}{2}}, \tag{30}$$

从而哈密顿方程组为

$$x' = \frac{\partial F}{\partial p_x}, \tag{31}$$

$$p_x' = -\frac{\partial F}{\partial x}, \tag{32}$$

$$y' = \frac{\partial F}{\partial p_y}, \tag{33}$$

$$p_y' = -\frac{\partial F}{\partial y}, \tag{34}$$

$$t' = -\frac{\partial F}{\partial H}, \tag{35}$$

$$H' = -\frac{\partial F}{\partial t}, \tag{36}$$

式中$'$代表$\frac{d}{ds}$。在环形加速器中，带电粒子在静磁场中运动，带电粒子在二极铁、四极铁、六极铁中运动，粒子运动的哈密顿函数H不是时间的显函数，不含时间变量t,所以H是运动不变量，是常数。所以哈密顿方程组由三维位形空间约化为二维维形空间。

2.3 多级磁铁的展开与横向运动方程

环形加速器主要有各种磁铁所组成，分立功能的磁铁得到了广泛的应用。环形加速器中带电粒子的横向运动主要是带电粒子在各种磁铁中的横向运动。磁铁的种类很多，主要有二极铁、四极铁、六极铁、八极铁、螺旋线圈等。二极铁用于带电粒子的偏转，使它们的轨道构成一个闭合环。四极铁用于带电粒子的聚焦。六极铁用于色品的补偿和非线性聚焦。八极铁用于Landau阻尼，螺旋线圈用于抑制电子云不稳定性。

加速器磁铁的理论与设计属于静磁学问题。由于加速器的轴对称结构特性，磁铁的理论设计可以简化为二维静磁学问题。忽略纵向运动方向坐标，也就是粒子运动前进方向，假定二维坐标系(x, y), 从麦克斯韦方程出发, 我们有

$$\nabla \cdot B = 0. \tag{37}$$

引入磁矢量势A,

$$B = \nabla \times A, \tag{38}$$

A 只有在纵向方向的分量A_s. 由静磁学理论, 我们有

$$\nabla \times B = 0. \tag{39}$$

由上式可引入标量势V,

$$B = -\nabla V. \tag{40}$$

在坐标系(x, y)中, 磁场分量B_x, B_y 可推导为

$$B_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial A_s}{\partial y}, \tag{41}$$

$$B_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial A_s}{\partial x}. \tag{42}$$

假定复变量$z = x + iy$, 定义复变函数$\tilde{A}$

$$\tilde{A}(z) = A_s(x, y), +iV(x, y). \tag{43}$$

在复平面z, A_s, V 满足Cauchy-Riemann 条件, 所以复变函数$\tilde{A}(z)$ 是解析函数，可做以下的级数展开

$$\tilde{A}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \kappa_n z^n. \tag{44}$$

由复变函数分析, 对所有在区域$|\ z\ | < r_c$内的点z收敛。在园区域之外, 复变函数不再是解析的。收敛半径可看作为轴心到磁铁轭或线圈最近的距离。

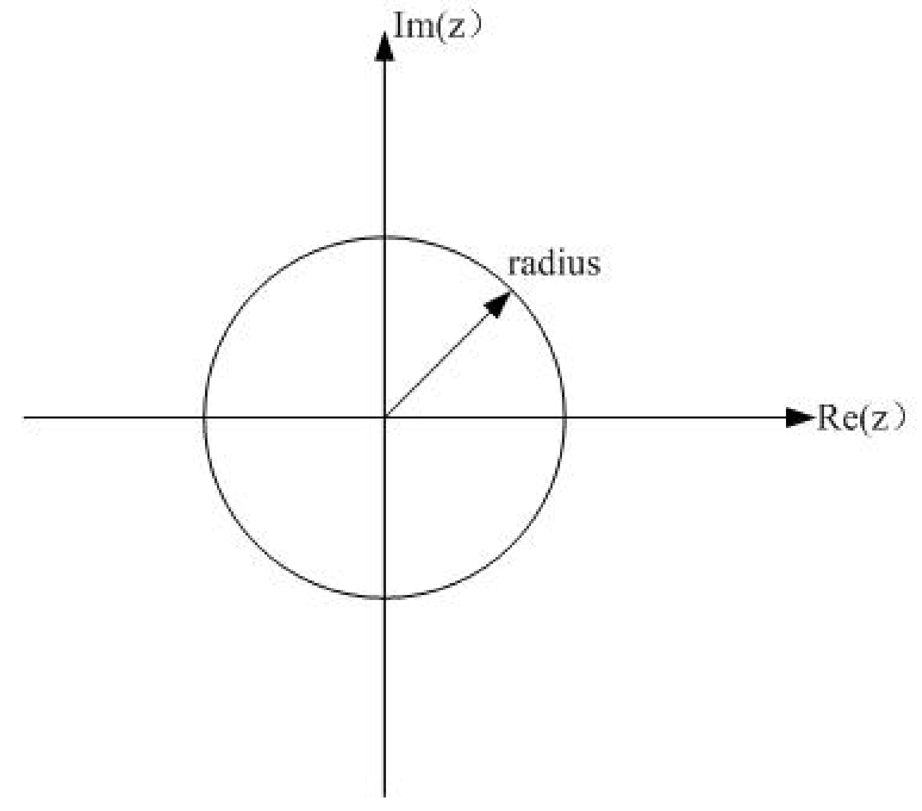


Figure 2. 复平面收敛区域

在实际应用中, 我们可以先求解A_s, V, 进而在坐标系中得到磁场分量B_x, B_y。在笛卡尔坐标系中，假定$\kappa_n = \lambda_n + i\mu_n$，那么

$$A_s(x, y) + iV(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \kappa_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n + i\mu_n)(x + iy)^n, \tag{45}$$

从而可得

$$A_s = b_1 x + a_1 y + b_2(x^2 - y^2) + a_2 xy + ..., \tag{46}$$

式中b_1, a_1为常数，代表水平二极铁和垂直二极铁，b_2, a_2代表正四极铁和斜四极铁。

环形加速器也可以近似看作为轴对称位形。在多极磁铁的展开中，$A_x = A_y = 0, A_s = A_s(x,y)$。对于四极磁铁，$A_s$的表达式可写为

$$A_s = \frac{p_0 K}{2e}(x^2 - y^2), \tag{47}$$

p_0为参考粒子的动量，K为四极铁的梯度参数，在四极铁中$\rho \to \infty$（参考粒子轨道近似为四极磁铁的中心轴）, 哈密顿函数简化为

$$F(x,y,p_x,p_y) = -\frac{p_0 K}{2}(x^2 - y^2) - (p_0^2 - p_x^2 - p_y^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{48}$$

哈密顿方程组为

$$x' = \frac{p_x}{p_0}, \tag{49}$$

$$y' = \frac{p_y}{p_0}, \tag{50}$$

$$p_x' = p_0 K x, \tag{51}$$

$$p_y' = p_0 K y. \tag{52}$$

由哈密顿方程组可得横向运动方程

$$x'' - Kx = 0, \tag{53}$$

$$y'' + Ky = 0, \tag{54}$$

横向运动方程就是常说的Hill方程。

3 横向运动

环形加速器主要由周期性磁聚焦磁场组成，由上节，带电粒子的横向运动方程为

$$x'' + K_x(s)x = 0, K_x = \frac{1}{\rho^2} \mp K_1(s), \tag{55}$$

$$y'' + K_y(s)y = 0, K_y = \pm K_1(s). \tag{56}$$

式中ρ为曲率半径，K_1为实际聚焦强度。$K_x(s), K_y(s)$为周期函数。在考虑能散的情况下，横向运动可以统一由一般性的Hill方程来描述

$$x'' + K(s)x = \frac{1}{\rho}\frac{\triangle p}{p_0}, \tag{57}$$

$K(s)$为周期函数，$\frac{\triangle p}{p_0}$ 为能散或动量离散。假定周期为L, $K(s+L) = K(s)$. Hill方程的解由齐次方程的解和特解组成，其解为

$$x(s) = C(s)x_0 + S(s)x_0' + D(s)\frac{\triangle p}{p_0}, \tag{58}$$

式中$x_0 = x(s_0)$, 起始点为s_0, $C(s)x_0 + S(s)x'_0$为齐次方程的解，$D(s)\frac{\triangle p}{p_0}$方程的特解。$C(s), S(s)$为齐次方程的两个线性无关的解，其满足

$$C'' + K(s)C = 0, S'' + K(s)S = 0. \tag{59}$$

Hill方程解中的$D(s)$定义为色散函数，其满足以下方程

$$D'' + K(s)D = \frac{1}{\rho(s)}. \tag{60}$$

定义Wronsian 函数如下

$$W = \left| \begin{array}{cc} C & S \\ C' & S' \end{array} \right|, \tag{61}$$

W满足以下方程

$$\frac{dW}{ds} = \frac{d}{ds}(CS' - C'S) = CS'' - C''S = -K(s)(CS - CS) = 0, \tag{62}$$

那么W沿粒子轨道是运动常数，选择在起始点s_0, $C_0 = 1, C'_0 = 0; S_0 = 0, S'_0 = 1$，从而$W = 1$。色散函数的解为

$$D(s) = S(s)\int_{s_0}^{s} \frac{1}{\rho(s)} C(s)ds - C(s)\int_{s_0}^{s} \frac{1}{\rho(s)} S(s)ds. \tag{63}$$

$x(s), x'(s), \frac{\triangle p(s)}{p_0}$与起始点$x(s_0), x'(s_0), \frac{\triangle p(s_0)}{p_0}$之间的关系由矩阵代数表达如下

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} C & S \\ C' & S' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{s_0} + \frac{\triangle p}{p_0} \begin{pmatrix} D \\ D' \end{pmatrix}, \tag{64}$$

上式可写为

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ \frac{\triangle p}{p_0} \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} C & S & D \\ C' & S' & D' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \frac{\triangle p}{p_0} \end{pmatrix}_{s_0}. \tag{65}$$

3.1 磁铁的传输矩阵

$\begin{pmatrix} C & S \\ C' & S' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C & S & D \\ C' & S' & D' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 为磁铁的传输矩阵。在Hill方程中，$K(s)$为周期性间断常数，定义角变量$\varphi = s\sqrt{|K|}$, 在$K > 0, K < 0, K = 0$三种情形下，Hill方程的解$C(s), S(s)$为

1. $K > 0$, 聚焦情形，$\begin{pmatrix} C & S \\ C' & S' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\varphi & \frac{1}{\sqrt{|K|}} sin\varphi \\ -\sqrt{|K|} sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}$.

2. $K<0$, 散焦情形，$\begin{pmatrix} C & S \\ C' & S' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cosh\varphi & \frac{1}{\sqrt{|K|}}sinh\varphi \\ -\sqrt{|K|}sinh\varphi & cosh\varphi \end{pmatrix}$.

3. $K=0$, 漂移空间，$\begin{pmatrix} C & S \\ C' & S' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

而对于色散函数$D(s)$有

1. $K>0$, $D(s) = S\int_0^s \frac{C}{\rho}ds - C\int_0^s \frac{S}{\rho}ds = \frac{1}{\rho K}(1-cos\varphi), D'(s) = \frac{1}{\rho\sqrt{|K|}}sin\varphi$.

2. $K<0$, $D(s) = -\frac{1}{\rho|K|}(1-cosh\varphi), D'(s) = \frac{1}{\rho\sqrt{|K|}}sinh\varphi$.

3. $K=0$, $D(s)=0, D'(s)=0$.

由以上公式，可得漂移段、四极铁、二极铁的传输矩阵如下：

漂移节 $\frac{1}{\rho}=0, k=0 \rightarrow K=0$, 传输矩阵为

$$M_x = M_y = \begin{pmatrix} 1 & l & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{66}$$

四极铁 $\frac{1}{\rho}=0 \rightarrow K=-k$, 如果$K>0$, 那么传输矩阵为

$$M_x = \begin{pmatrix} cosh\varphi & \frac{1}{\sqrt{|K|}}sinh\varphi & 0 \\ \sqrt{|K|}sinh\varphi & cosh\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{67}$$

$$M_y = \begin{pmatrix} cos\varphi & \frac{1}{\sqrt{|K|}}sin\varphi & 0 \\ -\sqrt{|K|}sin\varphi & cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{68}$$

四极铁在水平方向散焦，在垂直方向聚焦，如果$K<0$, M_x, M_y互相交换，四极铁在水平方向聚焦，在垂直方向散焦。在很多情况下，薄透镜近似计算能简化矩阵分析, 对Lattice分析很有用。四极铁的焦距$f=\frac{1}{kl}$ 远大于四极铁的长度$f=\frac{1}{kl}\gg l$, 在薄透镜近似下四极铁的传输矩阵为

$$M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{69}$$

$$M_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{70}$$

二极铁 $k=0\rightarrow K=\frac{1}{\rho^2}$，采用硬边界，$\varphi=\sqrt{|K|}l=\frac{l}{\rho}$, 其传输矩阵为

$$M_x=\begin{pmatrix} cos\varphi & \rho sin\varphi & \rho(1-cos\varphi) \\ -\frac{1}{\rho}sin\varphi & cos\varphi & sin\varphi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{71}$$

$$M_y=\begin{pmatrix} 1 & l & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{72}$$

以上是单个磁铁的传输矩阵，加速器的磁铁排列的总的传输矩阵是各个传输矩阵的乘积，我们以一个telescope望远镜系统(doublet)作矩阵分析。

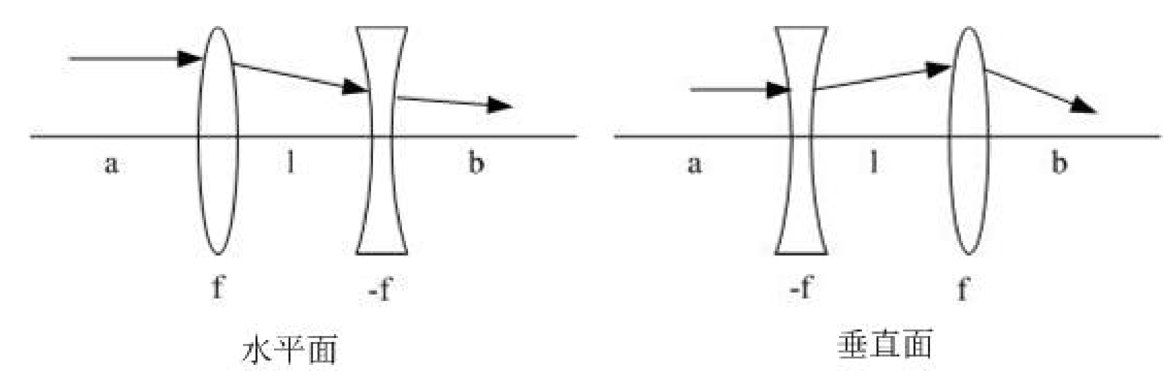


Figure 3.望远镜系统(doublet)

望远镜系统是一个FODO磁聚焦结构，广泛用于高能加速器中粒子束的聚焦和成像, 匹配lattice函数。如上图，轨迹平行于轴心的粒子束，无论在水平方向还是垂直方向都能得到聚焦，因为它的聚焦幅度大于散焦幅度。在薄透镜近似下，假定聚焦透镜和散焦透镜的焦距为$f,-f$, 望远镜系统的水平传输矩阵为

$$M_{doublet,x}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & l & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-\frac{l}{f} & l & 0 \\ -\frac{l}{f^2} & 1+\frac{l}{f} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{73}$$

其在垂直方向的传输矩阵为

$$M_{doublet,y}=\begin{pmatrix} 1+\frac{l}{f} & l & 0 \\ -\frac{l}{f^2} & 1-\frac{l}{f} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{74}$$

无论在水平方向还是垂直方向，传输矩阵元素M_{21}都为$M_{21}=-\frac{l}{f^2}$, 它是telescope系统的折射率，telescope系统在两个方向都是聚焦的。telescope系统的实际焦距为

$$f_{doublet}=\frac{f^2}{l}. \tag{75}$$

当粒子从距离telescope系统a 的地方入射，它在离telescope系统b的地方成像汇聚，那么其传输矩阵为

$$M_x = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M_{doublet,x} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{l}{f} - \frac{lb}{f^2} & a + b + l + \frac{lb}{f} - \frac{la}{f} - \frac{lab}{f^2} & 0 \\ -\frac{l}{f^2} & 1 + \frac{l}{f} - \frac{la}{f^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{76}$$

垂直方向的传输矩阵为

$$M_y = \begin{pmatrix} 1 + \frac{l}{f} - \frac{lb}{f^2} & a + b + l - \frac{lb}{f} + \frac{la}{f} - \frac{lab}{f^2} & 0 \\ -\frac{l}{f^2} & 1 - \frac{l}{f} - \frac{la}{f^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{77}$$

当$M_{12} = S = 0$, M可写为

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ C' & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{78}$$

从a点到b点可以成像，$x_b = mx_a$, m为放大倍数。如果$C' = -\frac{l}{f^2} \to 0$, 那么它是一个望远镜系统telescope。$M_x, M_y$中$M_{12} = S = 0$的条件是

$$M_x : \frac{b}{f} = \frac{\frac{a}{f} + \frac{l}{f} - \frac{la}{f^2}}{\frac{la}{f^2} - \frac{l}{f} - 1}, \tag{79}$$

$$M_y : \frac{a}{f} = \frac{\frac{b}{f} + \frac{l}{f} - \frac{lb}{f^2}}{\frac{lb}{f^2} - \frac{l}{f} - 1}. \tag{80}$$

上式中，a, b是可交换的，当$a \neq b$时是散光情形，当$a = b$时是聚光情形。下图是望远镜系统telescope成像示意图。

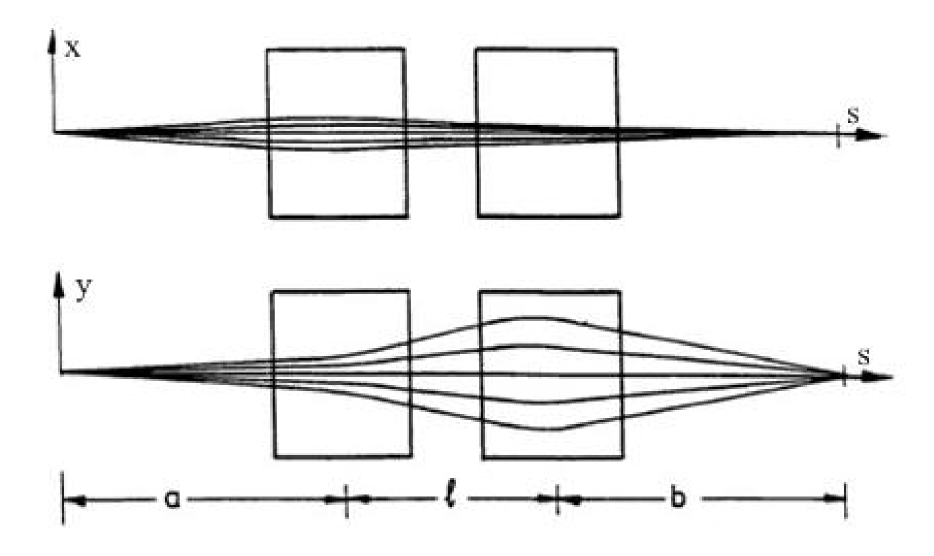


Figure 4. telescope 成像示意图

3.2 周期性磁聚焦结构(lattice)

对于周期为L的周期性磁聚焦结构，假定Hill方程为

$$y'' + K(s)y = 0, K(s+L) = K(s), \tag{81}$$

如果采用硬边界磁铁条件，$K(s)$可看作一系列阶梯函数的组合。在储存环两个点s, s_0之间，Hill方程的解y, y'可写为

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_s = M(s/s_0) \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_{s_0}, \tag{82}$$

其中

$$M(s/s_0) = \begin{pmatrix} C(s) & S(s) \\ C'(s) & S'(s) \end{pmatrix}, \tag{83}$$

以及

$$\begin{pmatrix} C(s_0) & S(s_0) \\ C'(s_0) & S'(s_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{84}$$

连续点之间的传输矩阵满足级联方程

$$M(s_2/s_0) = M(s_2/s_1) \cdot M(s_1/s_0). \tag{85}$$

对于周期L的磁聚焦结构，其传输矩阵为

$$M(s) = M(s+L/s), \tag{86}$$

n个周期的磁聚焦结构，其传输矩阵为

$$M(s) = M(s+nL/s) = M(s)^n, \tag{87}$$

当$n \to \infty$, 磁聚焦结构传输矩阵的元素是有限的，那么磁聚焦结构是稳定的。为获得稳定性条件，求解如下本征值方程

$$M \cdot \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}, \tag{88}$$

以上本征值方程有非零解的条件是

$$|M - \lambda I| = 0. \tag{89}$$

I 为单位矩阵，将M简写为$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 从而有以下本征值方程

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0. \tag{90}$$

上式为一元二次方程，其中$ad - bc = |M| = 1$，它的两个解λ_1, λ_2满足$\lambda_1 + \lambda_2 = a + d, \lambda_1\lambda_2 = 1$, λ_1, λ_2 可写为

$$\lambda_{1,2} = exp(\pm i\mu) = cos\mu \pm isin\mu, \tag{91}$$

所以

$$cos\mu = \frac{1}{2}(a + d) = \frac{1}{2}trace(M), \tag{92}$$

上面我们引入了一个新的实变量μ, 称之为相移变量，当$\frac{1}{2}trace(M) < 1$时μ为实变量，所以$\frac{1}{2}|trace(M)| < 1$为稳定性条件。在$\mu$的基础上，定义twiss参量$\alpha, \beta, \gamma$如下

$$M = Icos\mu + Jsin\mu, \tag{93}$$

式中$J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\gamma & -\alpha \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 为单位矩阵。twiss参量α, β, γ的表达式如下

$$\alpha = \frac{a - d}{2sin\mu}, \tag{94}$$

$$\beta = b/sin\mu, \tag{95}$$

$$\gamma = -c/sin\mu. \tag{96}$$

由$|M| = 1$ 可得

$$\beta\gamma - \alpha^2 = 1. \tag{97}$$

矩阵J有以下特性

$$|J| = 0, trace(J) = 0, J^2 = -I. \tag{98}$$

对于任意相移μ_1, μ_2有以下等式

$$(Icos\mu_1 + Jsin\mu_1) \cdot (Icos\mu_2 + Jsin\mu_2) = Icos(\mu_1 + \mu_2) + Jsin(\mu_1 + \mu_2) \tag{99}$$

那么M的n次方为

$$M^n = Icos(n\mu) + Jsin(n\mu). \tag{100}$$

总之，传输矩阵$M(s)$可由四个参量$\alpha(s), \beta(s), \gamma(s), \mu$来表示

$$M(s) = \begin{pmatrix} cos\mu + \alpha sin\mu & \beta sin\mu \\ -\gamma sin\mu & cos\mu - \alpha sin\mu \end{pmatrix}. \tag{101}$$

$\alpha(s), \beta(s), \gamma(s)$为周期函数

$$\alpha(s) = \alpha(s + L), \beta(s) = \beta(s + L), \gamma(s) = \gamma(s + L). \tag{102}$$

μ与s无关。

接下来，讨论磁聚焦结构$\alpha(s), \beta(s), \gamma(s)$的传输矩阵。可以证明$\gamma y^2 + 2\alpha yy' + \beta y'^2 = constant$为不变量。在储存环上两个点$s, s_0$处有等式

$$\gamma y^2 + 2\alpha yy' + \beta y'^2 = \gamma_0 y_0^2 + 2\alpha_0 y_0 y_0' + \beta_0 {y_0'}^2, \tag{103}$$

式中变量$y = y(s), y' = y'(s), y_0 = y(s_0), y'_0 = y'(s_0)$, 以及

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & S \\ C' & S' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}, \tag{104}$$

传输矩阵的逆矩阵为

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} S' & -S \\ -C' & C \end{pmatrix}. \tag{105}$$

所以

$$y_0 = S'y - Sy', \tag{106}$$

$$y'_0 = -C'y + Cy'. \tag{107}$$

$$\gamma_0(S'y-Sy')^2+2\alpha_0(S'y-Sy')(-C'y+Cy')+\beta_0(-C'y+Cy')^2 = \gamma y^2+2\alpha yy'+\beta y'^2, \tag{108}$$

比较上式两边的系数可得

$$\beta(s) = C^2\beta_0 - 2SC\alpha_0 + S^2\gamma_0, \tag{109}$$

$$\alpha(s) = -CC'\beta_0 + (SC' + S'C)\alpha_0 - SS'\gamma_0, \tag{110}$$

$$\gamma(s) = C'^2\beta_0 - 2S'C'\alpha_0 + S'^2\gamma_0, \tag{111}$$

用矩阵表达为

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^2 & 2SC & S^2 \\ -CC' & SC' + S'C & -SS' \\ C'^2 & -2S'C' & S'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \alpha_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix}. \tag{112}$$

3.3 FODO实例

telescope望远镜系统是没有二极铁的FODO磁聚焦结构。下面讨论一个有二极铁的FODO cell 磁聚焦结构，忽略二极铁的弱聚焦效应(二极铁的弯转半径ρ)，对四极铁采用薄透镜近似，如下图

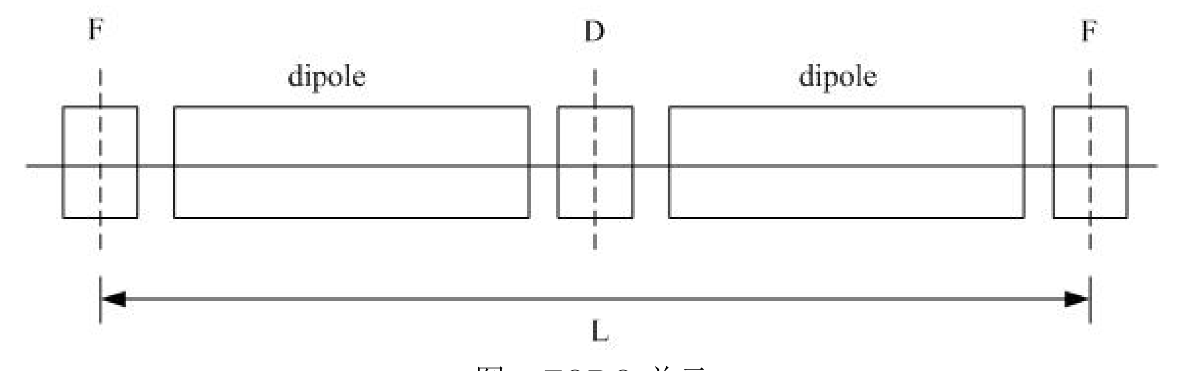


图5. FODO 单元

四极磁铁的焦距为f, FODO 单元磁聚焦结构的周期长度为L。由矩阵分析方法可得FODO单元相移μ为

$$cos\mu = 1 - \frac{1}{8}\frac{L^2}{f^2}. \tag{113}$$

β在聚焦四极铁中间最大，记为β_{max}, 在散焦四极铁中间最小，记为β_{min},其表达式为

$$\beta_{max} = L\frac{1 + sin\frac{\mu}{2}}{sin\mu}, \tag{114}$$

$$\beta_{min} = L\frac{1 - sin\frac{\mu}{2}}{sin\mu}. \tag{115}$$

同样，色散函数D在聚焦四极铁中间最大，记为D_{max}, 在散焦四极铁中间最小，记为D_{min},其表达式为

$$D_{max} = \frac{L^2}{4\rho}\frac{1 + \frac{1}{2}sin\frac{\mu}{2}}{sin^2\frac{\mu}{2}}, \tag{116}$$

$$D_{min} = \frac{L^2}{4\rho}\frac{1 - \frac{1}{2}sin\frac{\mu}{2}}{sin^2\frac{\mu}{2}}. \tag{117}$$

在设计中，常用的lattice匹配程序有MAD、Transport等，以下是一个MADX匹配的FODO单元。

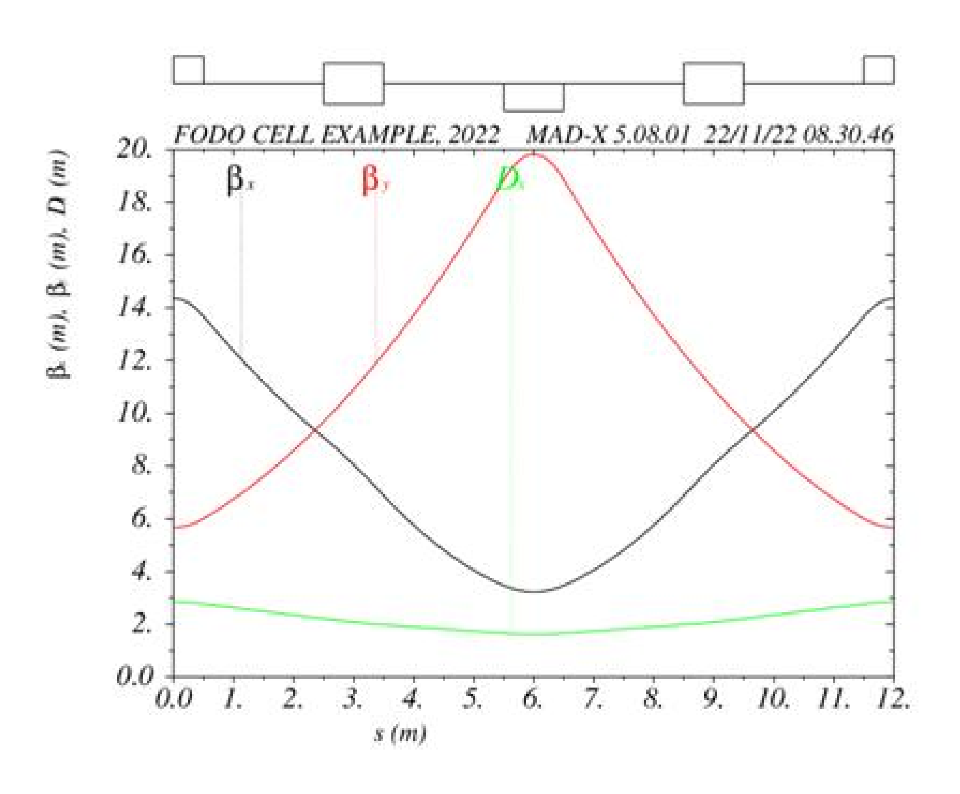


图6. FODO lattice twiss 参数图

4 纵向运动

带电粒子的纵向运动讨论粒子能量加速的问题。运用电场加速带电粒子是最主要的加速方法，而在感应加速器、Betatron加速器中运用变化的磁场产生的电场来加速用的不多。储存环加速器用高频腔来加速带电粒子。储存环主要由磁铁排列构成，只有一二个高频腔，高频腔可简化为高频间隙或加速间隙。我们先讨论理想情况下的加速间隙，也叫高频间隙。加速间隙可以看作为谐振腔的理想简化。

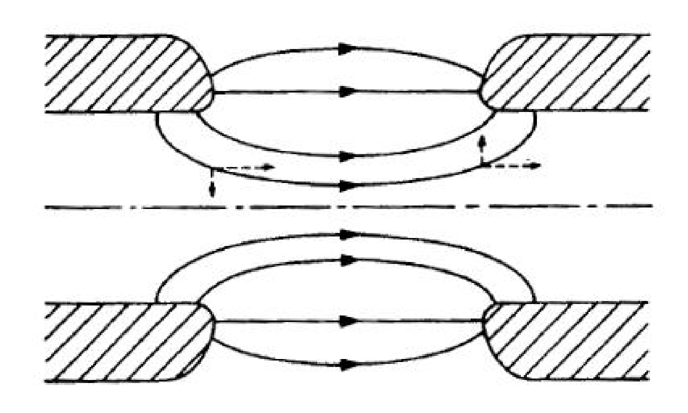


图7. 典型的高频间隙

如上图，假定高频间隙宽度g, 高频电压$Vcos\omega t$, 那么高频电场为

$$E_z = \frac{V}{g} cos\omega t. \tag{118}$$

如果带电粒子的速度为v, 那么粒子通过高频间隙时获得的能量增益为

$$\triangle E = \int_{-g/2}^{g/2} \frac{eV}{g} cos\omega \frac{z}{v} dz \tag{119}$$

$$= eV \frac{sin\theta/2}{\theta/2} = eVT, \tag{120}$$

式中$\theta = \omega\frac{g}{v}$为渡越角，$T = \frac{sin\theta/2}{\theta/2}$为渡越因子。渡越因子反应了加速效率，一般为了提高加速效率，可降低间隙长度g, 但间隙过短会引起打火，通常渡越因子值约在0.8附近。

加速间隙是加速谐振腔的简化，下图为钟形单cell、双cell高频腔的示意图。我们引入分路阻抗R_s 的概念

$$R_s = \frac{V^2}{P_d}, \tag{121}$$

P_d是消耗在高频间隙或谐振腔中功率。每单位长度分路阻抗为$r = R_s/L$, L为间隙宽度。

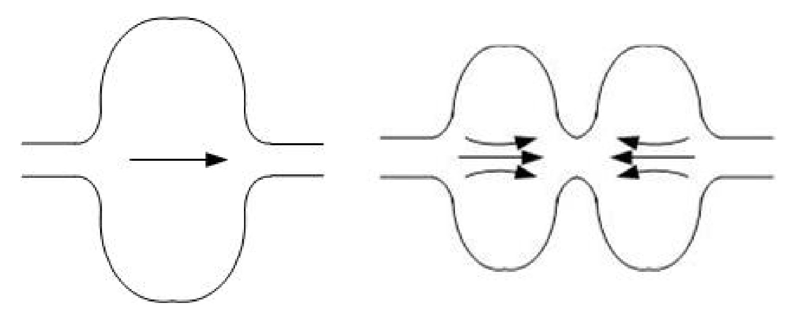


图8. 典型的高频腔示意图

4.1 纵向运动变量的选取

粒子纵向运动变量指单粒子动力学的运动变量，纵向运动本质上当然是牛顿运动方程，它是二阶微分方程，我们选取的变量适合把牛顿方程化为哈密顿方程，也就是把纵向运动的牛顿方程化为两个一阶微分方程，然后运用哈密顿力学方法处理纵向运动。

影响环形加速器粒子纵向运动的因素主要有高频腔的加速电压、磁铁的色散效应。我们主要关心的是粒子一圈(one turn)运动的纵向动力学,也就是研究one turn运动纵向运动变量的变化，但是把纵向运动变量连续化、平滑化。其实最适合研究环形加速器纵向运动的方法是离散化的一圈映射(one turn map)，也是一个矩阵化的分析方法。对于纵向运动，选取连续型运动变量为

$$\frac{\Delta E}{h\omega_0}, \phi - \phi_s. \tag{122}$$

式中ω_0是纵向运动角频率，h是高频腔射频频率的谐波数，ΔE为经过高频腔后粒子能量的增益，ϕ_s为同步相位，$\phi - \phi_s$为每次粒子经过高频腔与同步相位的相位差。

4.2 粒子能量的时间变化率

假定高频腔的射频频率$f = h\frac{\omega_0}{2\pi}$, 高频电压幅度为$V$, 粒子的电量为$q$, 那么每一圈粒子经过高频腔的能量变化为

$$\Delta E = qV sin\phi, \tag{123}$$

从而粒子能量变化率为

$$\frac{dE}{dt} \simeq \Delta E \cdot f = qV sin\phi \cdot f, \tag{124}$$

进一步参考同步粒子，可得以下一阶微分方程

$$\frac{d}{dt}(\frac{E - E_s}{h\omega_0}) = \frac{qV}{2\pi}(sin\phi - sin\phi_s). \tag{125}$$

在上式中，不能简单将ω_0视为常数，虽然我们将高频频率视为常数，ω_0要随时间变化。

4.3 粒子运动相位的时间变化率

以下考虑粒子运动相位变化，它是粒子能量变化的函数。假定粒子一圈运动时间为τ, 其变化率为

$$\frac{d\tau}{\tau} = \frac{dC}{C} - \frac{dv}{v}, \tag{126}$$

式中，C为粒子运动的轨道周长，v为粒子速度。轨道周长的变化是由于磁铁的色散效应

$$\frac{dC}{C} = \alpha_p \frac{dp}{p}, \tag{127}$$

α_p是储存环的动量压缩因子，p为粒子动量。由相对论运动学有以下等式

$$\frac{dp}{p} = \frac{1}{\beta^2}\frac{d\gamma}{\gamma}, \tag{128}$$

$$\frac{d\beta}{\beta} = \frac{1}{\beta^2\gamma^2}\frac{d\gamma}{\gamma}, \tag{129}$$

式中β为归一化速度，γ相对论因子。从而有

$$\frac{d\tau}{\tau} = \alpha_p \frac{dp}{p} - \frac{d\beta}{\beta} = \frac{1}{\beta^2}(\alpha_p - \frac{1}{\gamma^2}), \tag{130}$$

$$\frac{d\tau}{\tau} = -\frac{\eta}{\beta^2}\frac{d\gamma}{\gamma}. \tag{131}$$

式中$\eta = \frac{1}{\gamma^2} - \alpha_p$ 为滑相因子。粒子相位变化与一圈运动时间的关系为

$$\frac{d\phi}{\phi} = \frac{d\tau}{\tau}, \tag{132}$$

$$d\phi = 2\pi h \frac{d\tau}{\tau}, \tag{133}$$

从而

$$d\phi = -2\pi h \frac{\eta}{\beta^2}\frac{d\gamma}{\gamma}, \tag{134}$$

由于

$$\frac{d\phi}{dt} \simeq d\phi \cdot f_0 = -h\omega_0 \frac{\eta}{\beta^2}\frac{d\gamma}{\gamma} = -h\omega_0 \frac{\eta}{\beta^2}\frac{\Delta E}{E}. \tag{135}$$

最终我们得到粒子运动相位的时间变化率为

$$\frac{d}{dt}(\phi - \phi_s) = -h\omega_0 \frac{\eta}{\beta^2 E}(E - E_s). \tag{136}$$

化为归一化变量可得最终的方程

$$\frac{d}{dt}(\phi - \phi_s) = -h^2\omega_0^2 \frac{\eta}{\beta^2 E}(\frac{\Delta E}{h\omega_0}). \tag{137}$$

4.4 粒子运动的哈密顿方程

由粒子能量变化的时间变化率、粒子运动相位的时间变化率得到了两个一阶微分方程

$$\frac{d}{dt}(\frac{\Delta E}{h\omega_0}) = \frac{qV}{2\pi}(sin\phi - sin\phi_s), \tag{138}$$

$$\frac{d}{dt}(\phi - \phi_s) = -h^2\omega_0^2\frac{\eta}{\beta^2 E}(\frac{\Delta E}{h\omega_0}). \tag{139}$$

以上两个方程当然可以化为一个二阶微分方程，可以得到一个单摆运动方程。不过，我们可以把它们化为哈密顿函数、哈密顿方程，运用已有的哈密顿力学分析方法来进行分析，比如相空间体积守恒的Liouville定理，运动不变量（如能量守恒等）。

由关于$\frac{\Delta E}{h\omega_0}, \phi - \phi_s$的一阶微分方程，可以定义以下哈密顿函数

$$H = \frac{1}{2}h^2\omega_0^2\frac{\eta}{\beta^2 E}(\frac{\Delta E}{h\omega_0})^2 + \frac{qV}{2\pi h}(-cos\phi - \phi sin\phi_s + cos\phi_s + \phi_s sin\phi_s), \tag{140}$$

那么哈密顿正则方程为

$$\frac{d}{dt}(\frac{\Delta E}{h\omega_0}) = \frac{\partial H}{\partial \phi}, \tag{141}$$

$$\frac{d}{dt}(\phi) = -\frac{\partial H}{\partial(\frac{\Delta E}{h\omega_0})}. \tag{142}$$

运用以上哈密顿正则方程可以研究粒子在纵向相空间运动，存在基于稳定点的纵向捕获区。可以仔细研究纵向捕获区的大小，纵向捕获区的分界线。也存在基于鞍点的不稳定区，在相空间不稳定区，粒子作发散运动等。

5 讨论

本文主要讨论了环形加速器中基本的横向运动和纵向运动，重点放在了横向运动。环形加速器最基本的内容应该是周期性磁聚焦结构，磁聚焦结构的种类很多。对撞机储存环一般采用FODO结构，同步辐射光源储存环一般采用MBA结构，阻尼环采用TME结构，MAD程序可以匹配磁聚焦结构。而RLA/ERL返回环需要匹配到三阶束流光学，Transport程序可以匹配到三阶束流光学。环形加速器粒子动力学中还存在很多的共振问题，横向运动的两个方向之间，以及横向运动和纵向运动之间存在耦合。另外，环形加速器的动力学孔径也是一大类问题。

References

[1] S.Y.Lee, Accelerator Physics.

[2] M.Reiser, Theory and Design of charged particle beam.

[3] 周衍柏，理论力学教程，高等教育出版社.

[4] 郭硕鸿，电动力学，高等教育出版社。

[5] H.Goldstein, Classical Mechanics, Addison Wesley Publishing Company,Inc.

[6] J.D.Jackson, Classical Electrodynamics, John Wiley & Sons, Inc.

[7] 金玉明，电子储存环物理，中国科学技术大学出版社。

[8] 刘乃泉，加速器理论，清华大学出版社。

[9] 赵籍九，尹兆升，粒子加速器技术，高等教育出版社。

[10] Fifth general accelerator physics course, CERN Accelerator School, 1994.

[11] Fifth advanced accelerator physics course, CERN Accelerator School, 1995.

[12] A.Chao, M.Tigner, Handbook of Accelerator Physics and Engineering, World Scientific.

[13] S.Peggs,T.Satogata, Introducton to Accelerator Dynamics, Cambridge University Press & Peking University Press.

[14] 朱雄伟等，BXERL-FEL及其试验装置-X-ray一机两用的探索，talk at IHEP, 2008.

[15] 朱雄伟等，Design studies on the FEL-ERL at IHEP，talk at SLAC, 2009.

[16] 朱雄伟等，Design studies on the FEL-ERL at IHEP，talk at CESR, 2009.

[17] 朱雄伟等，Study on the characteristics of linac based THz light source, Chinese Physics C,33,10, 922 (2009).

[18] 朱雄伟等，Design study on the merger for BXERL-FEL, Chinese Physics C, 33, 8, 696 (2009).

[19] H.Grote, et al., MAD-Methodical Accelerator Design, 2015.

[20] K.L.Brown, et al., Transport: A Computer Program for Designing Charged Particle Beam Transport systems,1983.

Beam Dynamics of Circular Accelerator

Zhu Xiong-Wei
Institue of High Energy Physics, Chinese Academy of Sciences

Abstract

In this paper, we present a pedagogical description of the single particle dynamics for the circular accelerator. The beam dynamics of circular accelerator can be classified into the transverse motion and the longitudinal motion. The materials of this paper come from the practice of the circular accelerator's theory and design. We try to combine the physical problem and the mathematical method effectively and wholly. On the one hand, The requirement from the physical problem accelerate the developement of mathematics; On the other hand, more advanced the mathematical method, more easy the physical problem. One of the advantages is that we illustrate the beam dynamics of circular accelerator by Hamitonian Mechanics.

Keywords: Circular accelerator, transverse motion, longitudinal motion, Hamitonian Mechanics